Définition - propriétés algébriques

Ex 1 : ***QCM***

Plusieurs réponses sont possibles.

1) Équations ...

a) e^3 est la solution de l'équation $\ln x=3$

b) e^{-3} est la solution de l'équation $\ln x=-3$

c) $\ln(3)$ est la solution de l'équation $e^x=3$

d) $\ln(-3)$ est la solution de l'équation $e^x=-3$

e) $-\ln 3$ est la solution de l'équation $e^x=\frac{1}{3}$

f) L'équation $\ln x=m$ où $m\in\mathbb{R}$, admet toujours une unique solution $x=e^m$

g) L'équation $e^x=m$ où $m\in\mathbb{R}$, admet toujours une unique solution $x=\ln m$

2) Formules ...

a) $\ln(a+b)=\ln(a)\times\ln(b)$

b) $\ln(ab)=\ln(a)\ln(b)$

c) $\ln(a-b)=\dfrac{\ln(a)}{\ln(b)}$

d) $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)$

3) $\ln(ab^5)=$ ...

a) $5\ln(ab)$

b) $5(\ln(a)+\ln(b))$

c) $5\ln(a)\ln(b)$

d) $\ln(a)+5\ln(b)$

4) $\ln\left(a\times\dfrac{1}{a}\right)=$ ...

a) $-(\ln(a))^2$

b) -1

c) $-2\ln(a)$

d) 0

5) la moitié de $\ln(a)$ est ...

a) $\ln(a)-\ln(2)$

b) $\ln(a^{-2})$

c) $\ln(\sqrt{a})$

d) $\sqrt{\ln(a)}$

Ex 2 : ***Calculs avec les formules***

Simplifier :

1) $e^{\ln(2)}-e^{\ln(7)}$ 2) $3e^{\ln(5)}+5e^{-\ln(3)}$ 3) $\ln(2\sqrt{3})+2\ln(\sqrt{3})$

4) $\ln\left(\dfrac{3e^2}{\sqrt{e}}\right)$ 5) $\dfrac{\ln(125)}{\ln(25)}$ 6) $\dfrac{(\ln(e^3))^2}{\ln(e^4)}$ 7) $\ln(1+e^x)-x-\ln(1+e^{-x})$

Ex 3 : ***Équations et inéquations***

Résoudre les équations et inéquations ci-dessous :

1) $(e^x-2)(e^{2x}-8)=0$

2) $(e^{x-1}-3)^2=0$

3) $(e^{x^2+2x+5}+e^{-x})(3e^x+4)=e$

4) $8-4e^{\ln(0,5)\times x+1}>0$

5) $e^{3x+5}<3e^x$

6) $(2e^x-10)(5-e^x)<0$

Ex 4 :

Compléter …

1) La courbe représentative de la fonction exponentielle passe par le point A(ln2 ; …) et B(… ; π)

2) L'ensemble des réels x tels que $\ln(x)\leqslant 0$ est …

3) Si $e^a=b$ $(b>0)$, alors ln(…) = …

4) $\forall$ x $\in$ … , $\ln(e^x)=x$

5) $\forall$ x $\in$ … , $e^{\ln(x)}=x$

6) $\forall$ x $\in$ … , $\ln(x)>0$

Ex 5 : ***Calculs***

1) Exprimer en fonction de $\ln 2$ et de $\ln 3$:

a) $\ln\left(\dfrac{8}{9}\right)$ b) $\ln\left(\dfrac{4\sqrt{2}}{27}\right)$ c) $\dfrac{\ln 64}{\ln 81}+\dfrac{\ln 49}{\ln 7}$

2) Simplifier :

a) $4\ln(e^2)+\ln(\sqrt{e})$ b) $\ln\left(\dfrac{\sqrt{e}}{e^3}\right)$ c) $\dfrac{\ln(e^4)}{(\ln(e^3))^2}$

3) Calculer :

a) $\ln 3+\ln 9+\ln 27$ b) $\ln(\sqrt{5}-2)+\ln(\sqrt{5}+2)$

Ex 6 : ***Vrai ou faux***

Justifier

1) $\forall x\in\mathbb{R}^*$, $\ln(x^3)=3\ln(x)$

2) $\forall x\in\mathbb{R}$, $\ln(1+e^x)=x+\ln(1+e^{-x})$

3) $\forall x\in\mathbb{R}$, $\ln(1+e^{8x})-4x=\ln(e^{4x}+e^{-4x})$

Étude de la fonction logarithme népérien

Ex 7 : ***QCM***

Plusieurs réponses sont possibles.

1) L'ensemble de définition de la fonction ln est :

a) $[1;+\infty[$ b) $\mathbb{R}^+$ c) $\mathbb{R}$ d) $\mathbb{R}^-$ e) $\mathbb{R}_+^*$ f) $]0;+\infty[$

2) La fonction ln :

a) est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

c) est strictement positive sur $]1,+\infty[$.

d) est égale à sa dérivée.

e) prend la valeur 1 en 0.

3) Soit C la courbe représentative de la fonction ln.

a) La droite $\Delta : y=0$ est une asymptote à C .

b) C coupe l'axe des abscisses.

c) C admet une tangente de coefficient directeur -2.

d) C et la courbe de la fonction exp sont symétriques par rapport à la droite d'équation $d : y=x$.

Ex 8 : ***Limites***

Associer chaque limite au résultat qui convient :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x$ •	• 1
$\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x$ •	• $+\infty$
$\lim\limits_{x\to 0+} \ln x$ •	• 0
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ •	• n'existe pas
$\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\ln(x)}{x}$ •	• $-\infty$

Ex 9 : *Déterminer une limite*

Déterminer les limites suivantes

1) $\lim\limits_{x\to0+}\left(\frac{3}{x}-4x-5\ln x\right)$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{x}-4x-5\ln x\right)$

3) $\lim\limits_{x\to0+}\left(\ln x-\frac{1}{\ln x}\right)$

4) $\lim\limits_{x\to1-}\left(\ln x-\frac{1}{\ln x}\right)$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln x-\frac{1}{\ln x}\right)$

6) $\lim\limits_{x\to0+}(2x+\ln x)^2$

7) $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(3-e^x)$

8) $\lim\limits_{x\to\ln3-}\ln(3-e^x)$

9) $\lim\limits_{x\to1+}\left(\ln(x-1)\left(\ln2-\frac{1}{x}\right)\right)$

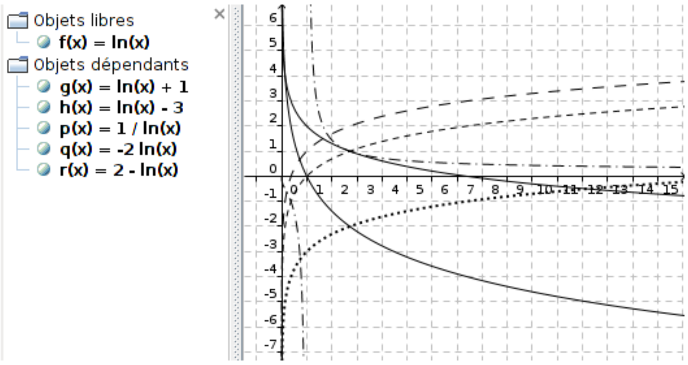
10) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln(x-1)\left(\ln2-\frac{1}{x}\right)\right)$

11) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{3x-6}{7x}\right)$

12) $\lim\limits_{x\to2+}\ln\left(\frac{3x-6}{7x}\right)$

Ex 10 : *A partir de la courbe représentative de la fonction ln*

Identifier les courbes de chacune des fonctions.



Ex 11 : *Variations sans calculer la dérivée*

Soit les fonctions f , g et h définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x)=\ln(x)+\ln(2)$, $g(x)=\frac{\ln(x)}{5}$ et $h(x)=1-3\ln(x)$

Déterminer le sens de variation de chacune de ces fonctions à partir de celui de la fonction ln.

Ex 12 : *Dérivées*

Dans chacun des cas, justifier que f est dérivable sur I et déterminer sa dérivée.

1) $f(x)=\frac{3x}{\ln(x)}$ sur $I=]1;+\infty[$

2) $f(x)=3x^2\ln(x)-\ln(3)$ sur $I=\mathbb{R}_+^*$

3) $f(x)=\frac{\ln(x)+1}{\ln(x)-1}$ sur $I=]e;+\infty[$

4) $f(x)=(\ln x)^2-\frac{1}{\ln x}$ sur $I=]1;+\infty[$

Ex 13 : *Tangente à la courbe*

Déterminer les coordonnées du point de la représentation graphique C de la fonction ln en lequel la tangente T a pour coefficient directeur 2.

Ex 14 : *Signe d'une fonction grâce au sens de variation*

Dans chaque cas, déterminer le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

1) $f(x)=2x^2-\ln x$ 2) $f(x)=x\ln x+e$

Ex 15 : *Déterminer une limite comportant une forme indéterminée*

Déterminer les limites suivantes

1) $\lim\limits_{x\to0+}(x^2-3x\ln x)$

2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1-x)}{2x}$

3) $\lim\limits_{x\to0+}\left(\frac{\ln2}{x}+\ln x\right)$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5}{x}\ln\left(\frac{1}{x}+1\right)$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}((\ln x)^2-3\ln x+2)$

6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(e^x+5)}{e^x}$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x-e\ln x)$

8) $\lim\limits_{x\to0+}(3x-e\ln x)$

9) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)-5x}{1+x}$

10) $\lim\limits_{x\to-1+}\frac{\ln(1+x)-5x}{1+x}$

11) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

12) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{\ln x}$

Ex 16 : *Déterminer une limite avec le nombre dérivé*

Déterminer $\lim\limits_{h\to0}\frac{\ln(3+h)-\ln3}{h}$ et $\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln(3x-2)}{x-1}$

Ex 17 : *Inéquations comportant* q^n

Les parties A et B sont indépendantes.

A) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que :

1) $3\times\left(\frac{7}{9}\right)^n<0,01$ 2) $1-0,25^n>0,99$ 3) $1-\left(1-\frac{1}{4}\right)^n>0,999$

B) On sait que le nombre d'atomes de carbone 14, en fonction du nombre n de siècles, est donné approximativement par $q_n=q_0\,0,987976^n$, où q_0 est le nombre initial d'atomes.

1) Déterminer la demi-vie du carbone 14 (durée au bout de laquelle la moitié des atomes de carbone 14 s'est désintégrée)

2) Déterminer l'âge des fragments trouvés par des archéologues, sachant que la teneur en carbone 14 est égale à 30 % de celle d'un fragment d'os actuel de la même masse pris comme témoin.

Ex 18 : ***Avec des suites***

Soit u la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$.

1) Déterminer la limite de la suite u .

2) $\forall n \neq 0$, on note $S_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$

a) Calculer S_3 .

b) Exprimer S_n en fonction de n .

c) En déduire la limite de S_n .

Fonctions du type $x : \longmapsto \ln(u(x))$

Ex 19 : ***Maîtriser le cours - Vrai ou faux***

Soit u une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs strictement positives.

1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\ln(u(x)) > 0$

2) La fonction $\ln(u)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

3) La dérivée de $\ln(u)$ est $\frac{1}{u}$ sur $\mathbb{R}$.

4) $\lim_{x \to +\infty} \ln(u(x)) = +\infty$

5) $\ln(u(x)) \geqslant \ln 5 \iff x \geqslant 5$

6) $\ln(u(x)) \leqslant 5 \iff 0 < u(x) \leqslant e^5$

Ex 20 : ***Résoudre une équation ou une inéquation comportant*** $\ln(u(x))$

Résoudre les équations ou inéquations suivantes :

1) $\ln(2x-5) = \ln 4$

2) $\ln(2x-5) = -3$

3) $\ln(7x+2) \geqslant \ln(3-x)$

4) $\ln(e^{2x}-25) \geqslant 0$

5) $\ln((x+1)(x-2)) \geqslant \ln 18$

6) $\ln(1-x^2) - \ln(x-3) \geqslant 0$

Ex 21 : ***Signe d'une fonction***

Étudier le signe des fonctions ci-dessous :

1) $f(x) = (x-3)\ln(x-1)$ 2) $g(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln(x-1)}$ 3) $h(x) = \ln\left(\frac{e^x-3}{e^x-1}\right)$

Ex 22 : ***Ensemble de définition***

Déterminer dans chaque cas l'ensemble de définition de la fonction f :

1) $f(x) = \ln(x^2) - 3$ 2) $f(x) = \ln(e^x - 1)$ 3) $f(x) = \ln(x^2 - 3)$

4) $f(x) = \frac{1}{\ln(x+2)}$ 5) $f(x) = \ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$

Ex 23 : ***Tableau de variation***

Donner le tableau de variation des fonctions ci-dessous :

1) $f(x) = (\ln x)^2 - \ln(x^2)$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$

2) $f(x) = (1-x)\ln(1-x)$ sur $I =]-\infty ; 1[$

3) $f(x) = \ln\left(\frac{e^x+1}{2e^x+3}\right)$ sur $I = \mathbb{R}$

Ex 24 : **Avec Xcas**

Soi f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = 2x^2 - (x^2+1)\ln(x^2+1)$

```
1 f(x):=2*x^2-(x^2+1)*ln(x^2+1)
      x -> 2*x^2-(x^2+1)*ln(x^2+1)
2 deriver(f(x),x);
      -2*x*ln(x^2+1)+2*x
3 a:=f(sqrt(e-1));simplifier(a);b:=f(sqrt(e^2-1));simplifier(b)
      (-exp(1)+2*(exp(1)-1), exp(1)-2, -2*exp(2)+2*(exp(2)-1), -2 )
4 solve(f(x)=0);
      "Unable to isolate x in -ln(x^2+1)*x^2-ln(x^2+1)+2*x^2
5 nSolve(f(x)=0,x=0);nSolve(f(x)=0,x=2)
      ( 0.0, 1.9802913 )
```

Répondre aux questions ci-dessous, en utilisant les résultats ci-dessus fourni par le logiciel de calcul formel Xcas.

1) Étudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}^+$.

2) Montrer que dans l'intervalle $\left[\sqrt{e-1} ; \sqrt{e^2-1}\right]$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α .

Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} .

3) En déduire le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}^+$.

Logarithme décimal

Ex 25 : ***Vrai ou faux***

1) $\log(e) = 1$

2) $\log(10^{-5}) = -5$

3) $\log(10^2 \times 10^3) = 5$

4) $\log(x) < 1 \iff 0 < x < 10$

5) $\log(x) = -3\log(5) \iff x = \frac{1}{125}$

6) $(\log(x))' = \frac{1}{x}$

Ex 26 : ***pH d'une solution aqueuse***

Le pH d'une solution aqueuse est donné par pH=-Log([H_3O^+]),

où [H_3O^+] est la concentration en ions H_3O^+ , exprimé en $mol.L^{-1}$

1) Calculer la concentration en ions H_3O^+ de l'eau pure (PH=7)

2) On considère une solution telle que [H_3O^+]= $7{,}1 \times 10^{-6}$.

Cette solution est-t-elle acide (pH<7) ou basique (pH>7).

3) On considère une solution de pH=9 . Que devient le pH si on multiplie la concentration en ions H_3O^+ par 100 ?

Ex 27 : ***Niveau sonore***

Le niveau sonore N d'un bruit, exprimé en décibels (dB), est donné par

$N = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$, où I est l'intensité sonore exprimé en W/ m^2 , et où I_0 est l'intensité de référence correspondant à la plus petite intensité acoustique audible.

On sait que, lorsqu'on met en présence plusieurs sources sonores, les intensités s'additionnent.

1) Le niveau sonore d'un lave-linge est de 50 dB.
Quel est le niveau sonore de deux lave-linge identiques ?
Le niveau sonore a-t-il doublé ?

2) Le niveau sonore d'une note de musique obtenue au violon est de 70 dB . Combien faut-il de violonistes jouant ensemble la même note, pour obtenir un niveau sonore de 80 dB ?

3) Le niveau sonore d'un marteau-piqueur est de 110 dB et celui d'un klaxon de voiture est de 80 dB. Quel est le niveau sonore des deux bruits réunis ? Que remarque-t-on ?

EN ROUTE VERS LE BAC

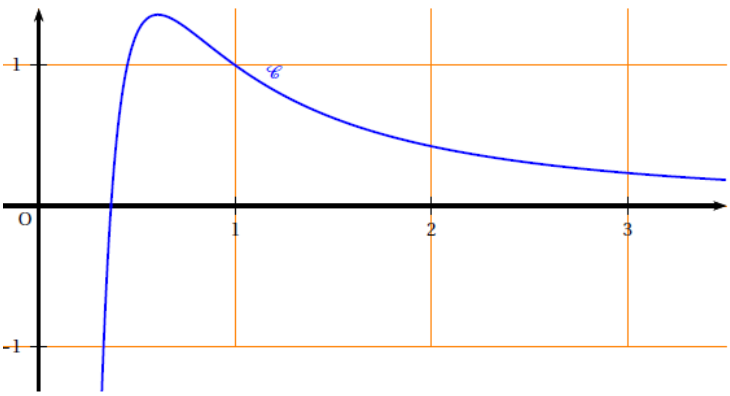
Ex 28 : *Baccalauréat S – Amérique du nord 30 mai 2013 – ex 4*

Fonction ln – étude de fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x)=\frac{1+\ln(x)}{x^2}$$

et soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan. La courbe $\mathscr{C}$ est donnée ci-dessous :



1. a. Étudier la limite de f en 0.

b. Que vaut $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}$? En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

c. En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe $\mathscr{C}$.

2. a. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
Démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$,

$$f'(x)=\frac{-1-2\ln(x)}{x^3}.$$

b. Résoudre sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ l'inéquation $-1-2\ln(x)>0$.
En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

c. Dresser le tableau des variations de la fonction f.

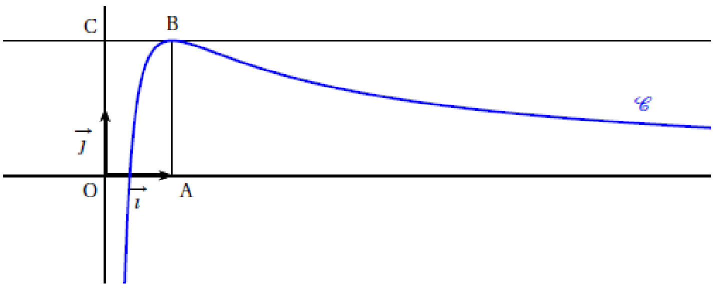
3. a. Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, dont on précisera les coordonnées.

b. En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Ex 29 : *Baccalauréat S – Métropole 20 juin 2013 – ex 2*

Fonction ln – utiliser une représentation graphique – étude de fonction – théorème des bijections - algorithme

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O},\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$, la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.



On dispose des informations suivantes :

— les points A, B, C ont pour coordonnées respectives $(1\,,0)$, $(1\,,2)$, $(0\,,2)$;
— la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point B et la droite (BC) est tangente à $\mathscr{C}$ en B ;
— il existe deux réels positifs a et b tels que pour tout réel strictement positif x,

$$f(x)=\frac{a+b\ln x}{x}.$$

1. a. En utilisant le graphique, donner les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.

b. Vérifier que pour tout réel strictement positif x, $f'(x)=\dfrac{(b-a)-b\ln x}{x^2}$.

c. En déduire les réels a et b.

2. a. Justifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0,+\infty[$, $f'(x)$ a le même signe que $-\ln x$.

b. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$. On pourra remarquer que pour tout réel x strictement positif, $f(x)=\dfrac{2}{x}+2\dfrac{\ln x}{x}$.

c. En déduire le tableau de variations de la fonction f.

3. a. Démontrer que l'équation $f(x)=1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0,1]$.

b. Par un raisonnement analogue, on démontre qu'il existe un unique réel β de l'intervalle $]1,+\infty]$ tel que $f(\beta)=1$.
Déterminer l'entier n tel que $n<\beta<n+1$.

4. On donne l'algorithme ci-dessous.

```
Variables :        a, b et m sont des nombres réels.
Initialisation :   Affecter à a la valeur 0.
                   Affecter à b la valeur 1.
Traitement :       Tant que b − a > 0,1
                   |  Affecter à m la valeur 1/2 (a + b).
                   |  Si f(m) < 1 alors Affecter à a la valeur m.
                   |  Sinon Affecter à b la valeur m.
                   |  Fin de Si.
                   Fin de Tant que.
Sortie :           Afficher a.
                   Afficher b.
```

a. Faire tourner cet algorithme en complétant le tableau ci-dessous que l'on recopiera sur la copie.

	étape 1	étape 2	étape 3	étape 4	étape 5
a	0				
b	1				
$b-a$					
m					

b. Que représentent les valeurs affichées par cet algorithme ?

c. Modifier l'algorithme ci-dessus pour qu'il affiche les deux bornes d'un encadrement de β d'amplitude 10^{-1}.

Ex 30 : *Baccalauréat S – Antilles Guyane 11 septembre 2014 – ex 3*

Fonction ln – résolution d'une équation

On considère l'équation (E_1) :

$$e^x - x^n = 0$$

où x est un réel strictement positif et n un entier naturel non nul.

1. Montrer que l'équation (E_1) est équivalente à l'équation (E_2) :

$$\ln(x) - \frac{x}{n} = 0.$$

2. Pour quelles valeurs de n l'équation (E_1) admet-elle deux solutions ?

Ex 31 : *Baccalauréat S – Amérique du nord 2 juin 2015 – ex 4*

Fonction ln – théorème des bijections – étude de fonction

Partie A

Soit u la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par

$$u(x) = \ln(x) + x - 3.$$

1. Justifier que la fonction u est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
2. Démontrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α comprise entre 2 et 3.
3. En déduire le signe de $u(x)$ en fonction de x.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)[\ln(x) - 2] + 2.$$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. Déterminer la limite de la fonction f en 0.
2. a. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$, $f'(x) = \frac{u(x)}{x^2}$ où u est la fonction définie dans la partie A.

   b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

Partie C

Soit $\mathscr{C}'$ la courbe d'équation $y = \ln(x)$.

1. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$, $f(x) - \ln(x) = \frac{2-\ln(x)}{x}$.
   En déduire que les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ ont un seul point commun dont on déterminera les coordonnées.

Ex 32 : *Baccalauréat S – Antilles Guyane 30 2 juin 2015 – ex 1*

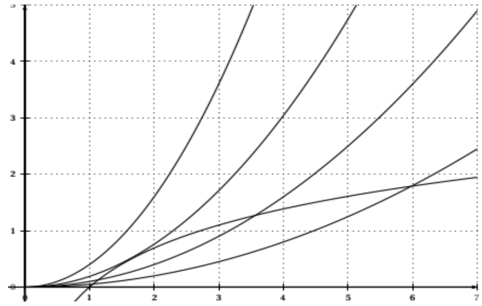
Fonction ln – famille de fonctions – théorème des bijections – intersections de courbes

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \ln x$.
Pour tout réel a strictement positif, on définit sur $]0\,;+\infty[$ la fonction g_a par $g_a(x) = ax^2$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f et Γ_a celle de la fonction g_a dans un repère du plan. Le but de l'exercice est d'étudier l'intersection des courbes $\mathscr{C}$ et Γ_a suivant les valeurs du réel strictement positif a.

Partie A

On a construit en **annexe 1** (*à rendre avec la copie*) les courbes $\mathscr{C}$, $\Gamma_{0,05}$, $\Gamma_{0,1}$, $\Gamma_{0,19}$ et $\Gamma_{0,4}$.

1. Nommer les différentes courbes sur le graphique. Aucune justification n'est demandée.
2. Utiliser le graphique pour émettre une conjecture sur le nombre de points d'intersection de $\mathscr{C}$ et Γ_a suivant les valeurs (à préciser) du réel a.



Partie B

Pour un réel a strictement positif, on considère la fonction h_a définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par

$$h_a(x) = \ln x - ax^2.$$

1. Justifier que x est l'abscisse d'un point M appartenant à l'intersection de $\mathscr{C}$ et Γ_a si et seulement si $h_a(x) = 0$.
2. a. On admet que la fonction h_a est dérivable sur $]0\,;+\infty[$, et on note h'_a la dérivée de la fonction h_a sur cet intervalle.
   Le tableau de variation de la fonction h_a est donné ci-dessous.
   Justifier, par le calcul, le signe de $h'_a(x)$ pour x appartenant à $]0\,;+\infty[$.

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2a}}$		$+\infty$
$h'_a(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$h_a(x)$	‖ $-\infty$	↗	$\frac{-1-\ln(2a)}{2}$	↘	

   b. Rappeler la limite de $\frac{\ln x}{x}$ en $+\infty$. En déduire la limite de la fonction h_a en $+\infty$.
   On ne demande pas de justifier la limite de h_a en 0.
3. Dans cette question et uniquement dans cette question, on suppose que $a = 0,1$.

   a. Justifier que, dans l'intervalle $\left]0\,;\frac{1}{\sqrt{0,2}}\right]$, l'équation $h_{0,1}(x) = 0$ admet une unique solution.
   On admet que cette équation a aussi une seule solution dans l'intervalle $\left]\frac{1}{\sqrt{0,2}}\,;+\infty\right[$.

   b. Quel est le nombre de points d'intersection de $\mathscr{C}$ et $\Gamma_{0,1}$?
4. Dans cette question et uniquement dans cette question, on suppose que $a = \frac{1}{2e}$.

   a. Déterminer la valeur du maximum de $h_{\frac{1}{2e}}$.

   b. En déduire le nombre de points d'intersection des courbes $\mathscr{C}$ et $\Gamma_{\frac{1}{2e}}$. Justifier.
5. Quelles sont les valeurs de a pour lesquelles $\mathscr{C}$ et Γ_a n'ont aucun point d'intersection ?
   Justifier.